

Zadanie 1. Zbadaj własności działań w podanych zbiorach:

1. $a \star b = a + b + 1$ w zbiorze $\mathbb{Z}$,
2. $a \star b = a + b + ab$ w zbiorze $\mathbb{R}$,
3. $(a_1, a_2) \star (b_1, b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1)$ w zbiorze $\mathbb{R}^2$,

Zadanie 2. Sprawdź, czy podana struktura jest grupą. Jeśli tak, sprawdź, czy jest grupą abelową.

- a) $(\mathbb{R}, \star)$, gdzie $a \star b = \frac{1}{2}(a + b)$,
- b) $(\mathbb{R}, \star)$, gdzie $a \star b = a + b + 2$,
- c) $(\mathbb{Z}, \circ)$, gdzie $a \circ b = a + b + 2$,
- d) $(A, +)$, gdzie $A = \{a\sqrt{3} + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$,
- e) $(A, \star)$, gdzie $A = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = 0, \operatorname{Im} z \neq 0\}$, $z_1 \star z_2 = iz_1 z_2$.

Zadanie 3. Jaką strukturę stanowi zbiór A wraz z podanymi działaniami?

- a) $A = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, $(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d)$, $(a, b) \odot (c, d) = (ac, bd)$,
- b) $A = \{x \in \mathbb{Q} : 0 \leq x < 1\}$, $x \star y = \min\{x, y\}$, $x \circ y = \max\{x, y\}$,
- c) $A = \mathbb{Q}$, $a \oplus b = a + b + 1$, $a \odot b = ab + a + b$,
- d) $A = \{x \in \mathbb{Q} : \exists a \in \mathbb{Z}, \exists k \in \mathbb{N}_0 : x = \frac{a}{2^k}\}$ z dodawaniem i mnożeniem.

Zadanie 4. W zbiorze $\mathbb{R}^2$ określamy następujące działania:

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d),$$
$$(a, b) \odot (c, d) = (ac + 2bd, ad + bc).$$

Wykaż, że struktura $(\mathbb{Q}^2, \oplus, \odot)$ jest ciałem. Czy struktura $(\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$ jest ciałem?

Zadanie 5.

- a) Wykaż, że w dowolnej grupie $(G, \star)$ równość $a^2 = a$ (gdzie $a^2 = a \star a$) zachodzi wtedy i tylko wtedy gdy a jest elementem neutralnym grupy G .
- b) Sprawdź, czy para $(A, \cdot)$ jest grupą, jeśli $A = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.
- c) Sprawdź, czy para $(B, \cdot)$ jest grupą, jeśli $B = \{z \in \mathbb{C} : |z| \geq 1\}$.

Zadanie 6. Niech $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$ dla $n \in \mathbb{N}$. W zbiorze $\mathbb{Z}_n$ określamy działania $+_n$ oraz $\cdot_n$ następująco: $x +_n y$ to reszta z dzielenia liczby $x + y$ przez n , natomiast $x \cdot_n y$ to reszta z dzielenia liczby xy przez n . Udowodnij, że $(\mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n)$ jest pierścieniem.

Zadanie 7. Dla dowolnych $(z_1, w_1), (z_2, w_2) \in \mathbb{C}$ określamy działania:

$$\begin{aligned}(z_1, w_1) + (z_2, w_2) &= (z_1 + z_2, w_1 + w_2), \\ (z_1, w_1) \star (z_2, w_2) &= (z_1 z_2 - w_1 \overline{w_2}, z_1 w_2 + w_1 \overline{z_2}).\end{aligned}$$

Sprawdź, czy struktura $(\mathbb{C}^2, +, \star)$ jest ciałem. Jeśli tak, sprawdź czy jest to ciało przemienne.

Zadanie 8. W zbiorze $\mathbb{Z}$ określamy działania $\oplus$ oraz $\odot$ następująco:

$$x \oplus y = 1 + x + y \qquad x \odot y = xy + x + y.$$

Sprawdź, czy działanie $\oplus$ jest rozdzielne względem działania $\odot$ oraz czy działanie $\odot$ jest rozdzielne względem działania $\oplus$.

Zadanie 9. W zbiorze $\mathbb{N}$ określamy działania $x \diamond y = x^y$ oraz $x \star y = xy$. Sprawdź, czy zachodzi rozdzielność (lewo- i prawostronna) działania $\diamond$ względem $\star$ oraz $\star$ względem $\diamond$.

Zadanie 10. Niech G oznacza grupę odwzorowań $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takich, że $g(x) = ax + b$, $a \neq 0$. Udowodnij, że odwzorowanie $f_a : G \ni g \rightarrow a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ jest homomorfizmem grupy $(G, \circ)$ w grupę $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$.

Zadanie 11. Niech $\mathbb{Q}(\sqrt{a}) = \{m + n\sqrt{a} : m, n \in \mathbb{Q}\}$.

- a) Udowodnij, że grupy $(\mathbb{Q}(\sqrt{2}), +)$ i $(\mathbb{Q}(\sqrt{3}), +)$ są izomorficzne.
- b) Czy istnieje izomorfizm ciała $(\mathbb{Q}(\sqrt{2}), +, \cdot)$ na ciało $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$? Odpowiedź uzasadnij.
- c) Czy istnieje izomorfizm ciała $(\mathbb{Q}(\sqrt{2}), +, \cdot)$ na ciało $(\mathbb{Q}(\sqrt{3}), +, \cdot)$? Odpowiedź uzasadnij.